第3講　2次関数(2)

【基礎確認事項】

[1]　2次関数の最大・最小

□y が x の関数であるとき，変数 x のとり得る値の範囲をこの関数の**定義域**といい，このときの y のとり得る値の範囲をこの関数の**値域**という．

□関数の値域に最大の値があるとき，その値を関数の**最大値**といい，最小の値があるとき，その値を関数の**最小値**という．

□一般的に，変数のとり得る値の範囲をその変数の**変域**という．

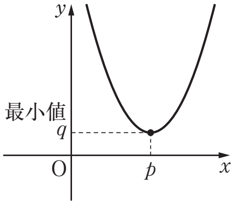
□2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小について考える．

定義域がすべての実数のとき

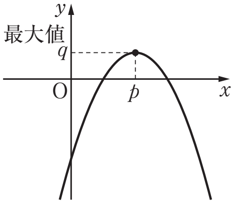
$a>0$ ならば，グラフは下に凸であり，
最小値は q，最大値はなし

$a<0$ ならば，グラフは上に凸であり，
最小値はなし，最大値は q

つまり，最大値・最小値は軸でとり，
その値は頂点の y 座標である．

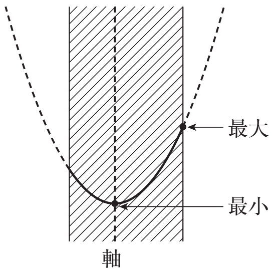


$a>0$



$a<0$

定義域に制限があるときは，グラフで考える．
その際，軸と定義域の位置関係に注意するとよい．



⇒　C&U 1 2

[2]　2次関数の決定

□与えられた条件を満たす2次関数を求める場合は，その条件によって最初におく式を工夫するとよい．

1．最大値や最小値，軸や頂点が与えられた場合は　$y=a(x-p)^2+q$　とおく
2．グラフが通る3点の座標が与えられた場合は　$y=ax^2+bx+c$　とおく
3．グラフと x 軸との2交点の座標が与えられた場合は　$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$　とおく

が主な方針である．3．については第4講[2]の「2次関数のグラフと x 軸の位置関係」により導かれる．いずれの形も x^2 の係数 a は共通であり，注意すべきポイントとなる．

⇒　C&U 3

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　次の２次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．また，値域を求めよ．

(1)　$y=x^2-3$　　(2)　$y=-\frac{1}{2}x^2-3x+4$

2　２次関数 $y=x^2-2x+2$ の次の定義域における最大値，最小値があればそれを求めよ．また，値域を求めよ．

(1)　$-1\leqq x\leqq 2$　　(2)　$0<x<3$　　(3)　$0\leqq x<2$

(4)　$2\leqq x\leqq 4$　　(5)　$-2\leqq x<0$

3　次の条件を満たす２次関数の式を求めよ．

(1)　頂点が $(1,\ 2)$ で，点 $(2,\ 5)$ を通る．

(2)　$x=2$ のとき最大値 3 をとり，点 $(0,\ -1)$ を通る．

(3)　最小値が -1 で，２点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$ を通る．

(4)　３点 $(-1,\ 7)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 11)$ を通る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　2次関数(2)

1 (1) $0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)=x^2-2ax+3a^2$ の最小値 $m(a)$ を a の式で表せ.

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)=x^2-2ax+3a^2$ の最大値 $M(a)$ を a の式で表せ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 2次関数 $f(x)=-x^2+6x-5$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ をそれぞれ a の式で表せ.

［2］ $x+y=3$ のとき，次の問いに答えよ.

(1) $3x^2+2y^2$ の最小値を求めよ.

(2) $x \geqq 2$，$y \geqq -1$ のとき，$3x^2+2y^2$ の最大値，最小値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 (1) 放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 5)$ を通り，その頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるような放物線の方程式を求めよ．

(2) 定義域を $-2\leqq x\leqq 1$ とする関数 $f(x)=ax^2+2ax+b$ の最大値が 6，最小値が 3 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　2次関数(2)

2次関数 $y=2x^2-4(a+1)x+10a+1$ のグラフの頂点の座標を a を用いて表すと，

($a+$ [ア] ， $-$ [イ] a^2+ [ウ] $a-$ [エ]) である．この関数の $-1\leqq x\leqq 3$ における最小値は

$a<-$ [オ] のとき　[カキ] $a+$ [ク]

$-$ [オ] $\leqq a\leqq$ [ケ] のとき　$-$ [イ] a^2+ [ウ] $a-$ [エ]

[ケ] $<a$ のとき　[コサ] $a+$ [シ]

である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

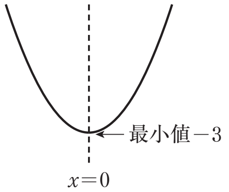
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　２次関数(2)

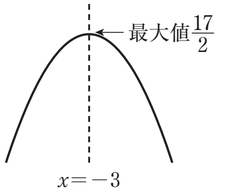
【CHECK & UP】

1

(1)



(2)



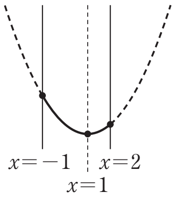
> 凸方向に注意しながらグラフの概形をかく．最大・最小を考えるだけであればグラフは x 軸，y 軸を必ずしも必要としない．グラフをかくときには，臨機応変に必要な部分のみをかくことが今後必要となってくるであろう．

(1)　最大値**なし**　最小値 **−3**　　値域 $\boldsymbol{y \geqq -3}$

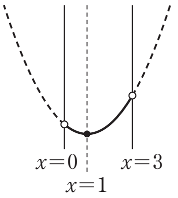
(2)　$y=-\frac{1}{2}x^2-3x+4=-\frac{1}{2}(x+3)^2+\frac{17}{2}$　　最大値 $\boldsymbol{\frac{17}{2}}$　最小値**なし**　値域 $\boldsymbol{y \leqq \frac{17}{2}}$

2　$y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$　　軸：$x=1$

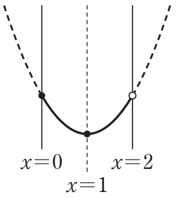
(1)



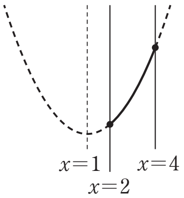
(2)



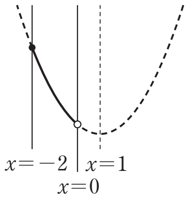
(3)



(4)



(5)



(1)　最大値 **5**　最小値 **1**　　値域 $\boldsymbol{1 \leqq y \leqq 5}$

(2)　最大値**なし**　最小値 **1**　　値域 $\boldsymbol{1 \leqq y < 5}$

(3)　最大値 **2**　最小値 **1**　　値域 $\boldsymbol{1 \leqq y \leqq 2}$

(4)　最大値 **10**　最小値 **2**　　値域 $\boldsymbol{2 \leqq y \leqq 10}$

(5)　最大値 **10**　最小値**なし**　　値域 $\boldsymbol{2 < y \leqq 10}$

> 下に凸の放物線の場合，その定義域において，最大値は軸から最も遠いところでとり，最小値は軸に最も近いところ（軸が含まれれば，軸のところ）でとる．定義域に等号が含まれていない場合は注意．
> 　また定義域に等号が含まれず最大値や最小値が存在しない場合でも，値域には値が現れることがある．

3　(1)　頂点が $(1,\ 2)$ より，$y=a(x-1)^2+2$ とおく．

点 $(2,\ 5)$ を通るので　$5=a(2-1)^2+2$　　$a=3$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=3(x-1)^2+2}$

(2)　$x=2$ で最大値 3 をとるので，$y=a(x-2)^2+3$ とおける．

ただし $a<0$ である．さらに点 $(0,\ -1)$ を通るので

$-1=a(0-2)^2+3$　　$a=-1$　　これは $a<0$ を満たす．

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=-(x-2)^2+3}$

(3)　最小値が -1 なので，$y=a(x-p)^2-1$　とおける．

ただし $a>0$ である．さらに 2 点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$ を通るので

$1=ap^2-1$　……①　　$1=a(2-p)^2-1$　……②

①より $ap^2=2$　　②より $a(2-p)^2=2$

よって　$ap^2=a(2-p)^2$

$a \neq 0$ より　$p^2=(2-p)^2$　　よって　$p=1$　このとき　$a=2$

したがって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=2(x-1)^2-1}$

> (2)や(3)は，変域が実数全体であるときの最大値，最小値に関する条件，すなわち頂点に関する条件である．それに加え，そのグラフの凸方向を，x^2 の係数の符号が確定する．それを答案に記しておくことで，不適な値が出てきたときにそれを排除することができる．
> 　このように，グラフなどから文字（変数）のとり得る値や符号が限定されるとわかる場合は，答案に確実に残し，解が適するかどうかのチェックをする必要がある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)　求める2次関数を　$y=ax^2+bx+c$ とおく．

点 $(-1,\ 7)$ を通るので，$7=a-b+c$　……①

点 $(2,\ 4)$ を通るので，$4=4a+2b+c$　……②

点 $(3,\ 11)$ を通るので，$11=9a+3b+c$　……③

②－① より　$3a+3b=-3$　すなわち　$a+b=-1$　……④

③－② より　$5a+b=7$　……⑤

④，⑤より　$a=2,\ b=-3$　このとき①より　$c=2$

よって，求める2次関数は　$\boldsymbol{y=2x^2-3x+2}$

(4)　この問題においては，その解法で3文字についての1次方程式（3元1次方程式）の連立方程式を扱う．基本的には1文字消去．特に2次関数の場合は定数項 c の係数は常に1であるため，式変形をしなければいずれか2式の差をとり c を消去することができる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　２次関数(2)

1　(1)　$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)=x^2-2ax+3a^2$ の最小値 $m(a)$ を a の式で表せ.

(2)　$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)=x^2-2ax+3a^2$ の最大値 $M(a)$ を a の式で表せ.

$f(x)=x^2-2ax+3a^2=(x-a)^2+2a^2$　　軸：$x=a$　　定義域：$0 \leqq x \leqq 2$

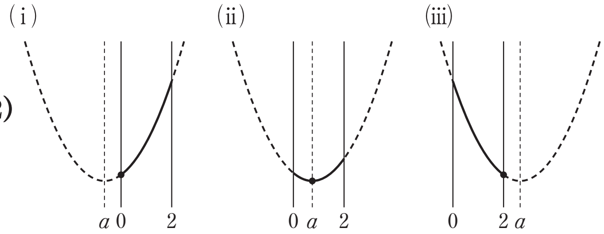
(1)　$a<0$ のとき　最小値は　$f(0)=3a^2$

$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　最小値は　$f(a)=2a^2$

$2<a$ のとき　最小値は　$f(2)=3a^2-4a+4$

以上より

$$\boldsymbol{m(a)=\begin{cases} 3a^2 & (a<0) \\ 2a^2 & (0 \leqq a \leqq 2) \\ 3a^2-4a+4 & (2<a) \end{cases}}$$



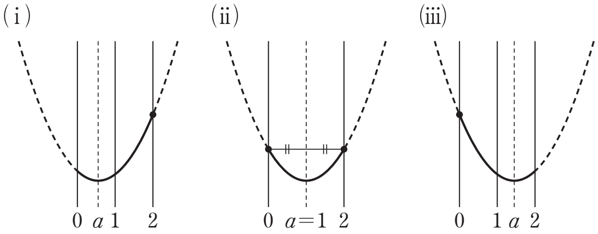
(2)　$a<1$ のとき　最大値は　$f(2)=3a^2-4a+4$

$a=1$ のとき　最大値は　$f(0)=f(2)=3$

$a>1$ のとき　最大値は　$f(0)=3a^2$

以上より

$$\boldsymbol{M(a)=\begin{cases} 3a^2-4a+4 & (a<1) \\ 3a^2 & (1 \leqq a) \end{cases}}$$



2　[1]　2 次関数 $f(x)=-x^2+6x-5$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ をそれぞれ a の式で表せ.

$f(x)=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4$　　軸：$x=3$　　定義域：$0 \leqq x \leqq a$

$0 \leqq a<3$ のとき

最大値は　$f(a)=-a^2+6a-5$

最小値は　$f(0)=-5$

$3 \leqq a<6$ のとき

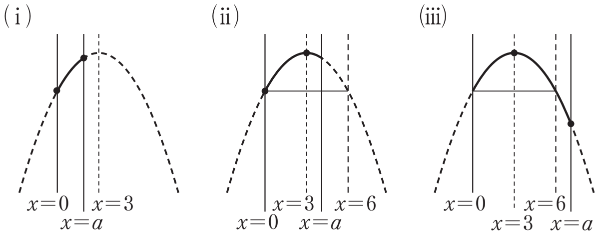
最大値は　$f(3)=4$

最小値は　$f(0)=-5$

$6 \leqq a$ のとき

最大値は　$f(3)=4$

最小値は　$f(a)=-a^2+6a-5$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より

$$\boldsymbol{M(a)=\begin{cases}-a^2+6a-5 & (0\leqq a<3)\\ 4 & (3\leqq a)\end{cases}}\qquad \boldsymbol{m(a)=\begin{cases}-5 & (0\leqq a<6)\\ -a^2+6a-5 & (6\leqq a)\end{cases}}$$

> **2** ［2］　$x+y=3$ のとき，次の問いに答えよ．
> (1)　$3x^2+2y^2$ の最小値を求めよ．
> (2)　$x\geqq 2$，$y\geqq -1$ のとき，$3x^2+2y^2$ の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$x+y=3$ より　$y=3-x$

$$3x^2+2y^2=3x^2+2(3-x)^2=5x^2-12x+18=5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{54}{5}$$

したがって　$x=\frac{6}{5}$，$y=\frac{9}{5}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{54}{5}}$

(2)　$x+y=3$ より　$y=3-x$

これと $y\geqq -1$ より $3-x\geqq -1$　　よって　$x\leqq 4$

$x\geqq 2$ とあわせて　$2\leqq x\leqq 4$

$$3x^2+2y^2=5x^2-12x+18=5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{54}{5}\qquad (2\leqq x\leqq 4)$$

したがって　$x=2$，$y=1$ のとき　**最小値 14**　　$x=4$，$y=-1$ のとき　**最大値 50**

> **3** (1)　放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 5)$ を通り，その頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるような放物線の方程式を求めよ．
> (2)　定義域を $-2\leqq x\leqq 1$ とする関数 $f(x)=ax^2+2ax+b$ の最大値が 6，最小値が 3 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

(1)　求める放物線の頂点は直線 $y=2x+1$ 上の点であることより $(t,\ 2t+1)$ とおける．

さらにその放物線は，放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したものであることより

その式は　$y=-2(x-t)^2+2t+1$　とおける．

これが点 $(2,\ 5)$ を通ることより

$$5=-2(2-t)^2+2t+1\qquad t^2-5t+6=0\qquad t=2,\ 3$$

したがって　求める放物線の式は　$\boldsymbol{y=-2(x-2)^2+5,\ y=-2(x-3)^2+7}$

(2)　$a=0$ のとき　$f(x)=b$　これは x の値に関わらず一定より，不適．

$a\neq 0$ のとき　$f(x)$ は 2 次関数である．

$f(x)=ax^2+2ax+b=a(x+1)^2-a+b$　　軸：$x=-1$　　定義域：$-2\leqq x\leqq 1$

$a>0$ のとき　$f(x)$ のグラフは下に凸の放物線

よって　最大値は $f(1)=3a+b$　　最小値は $f(-1)=-a+b$　であることより

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$3a+b=6$，$-a+b=3$　したがって $a=\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{15}{4}$　これは $a>0$ を満たす．

　$a<0$ のとき　$f(x)$ のグラフは上に凸の放物線

よって　最大値は $f(-1)=-a+b$　最小値は $f(1)=3a+b$　であることより

$-a+b=6$，$3a+b=3$　　したがって　$a=-\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{21}{4}$

これは $a<0$ を満たす．

　以上より　$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{15}{4}\right),\ \left(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{21}{4}\right)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　２次関数(2)

2 次関数 $y=2x^2-4(a+1)x+10a+1$ のグラフの頂点の座標を a を用いて表すと，
$(a+$ ア , $-$ イ a^2+ ウ $a-$ エ $)$ である．この関数の $-1\leqq x\leqq 3$ における最小値は

$a<-$ オ のとき	カキ $a+$ ク
$-$ オ $\leqq a\leqq$ ケ のとき	$-$ イ a^2+ ウ $a-$ エ
ケ $<a$ のとき	コサ $a+$ シ

である．

$f(x)=2x^2-4(a+1)x+10a+1=2\{x-(a+1)\}^2-2a^2+6a-1$　とおくと，
$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は $(a+\mathbf{1},\ -\mathbf{2}a^2+\mathbf{6}a-\mathbf{1})$ である．
したがって，この関数の $-1\leqq x\leqq 3$ における最小値は

$a+1<-1$　つまり　$a<-\mathbf{2}$　のとき，最小値　$f(-1)=\mathbf{14}a+\mathbf{7}$

$-1\leqq a+1\leqq 3$　つまり　$-\mathbf{2}\leqq a\leqq \mathbf{2}$　のとき，最小値　$f(a+1)=-\mathbf{2}a^2+\mathbf{6}a-\mathbf{1}$

$3<a+1$　つまり　$\mathbf{2}<a$　のとき，最小値　$f(3)=-\mathbf{2}a+\mathbf{7}$

である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。